

Charakterisierung der H_∞ -Norm eines lin. Systems

$$U_g: \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bd \\ z &= Cx \end{aligned}$$

Satz: Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) U_g ist asy. stabil

$$\int_0^\infty \|z(t)\|^2 dt < \gamma^2 \int_0^\infty \|d(t)\|^2 dt \quad \forall d \in L_2 \quad x(0) = 0$$

(iii) Es existiert $P = P^T > 0$ so, dass

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma^2} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0$$

Bounded Real Lemma

ist

Beweis des Bounded Real Lemmas

Hinreichender Teil, d.h. (iii) $\Rightarrow$ (i):

$$\begin{bmatrix} x^T & d^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma^2} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ d \end{bmatrix} < 0$$

mit: $V(x) = x^T P x$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &= (x^T A^T + d^T B^T) P x + x^T P (A x + B d) \\ &= \begin{bmatrix} x^T & d^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ d \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\leadsto \dot{V}(x) + \begin{bmatrix} z^T & d^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma^2} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ d \end{bmatrix} < 0$$

ist

Bounded Real Lemma (proof. continued)

$$\leadsto \dot{V}(x) + \begin{bmatrix} z^T & d^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma} I & 0 \\ 0 & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ d \end{bmatrix} < 0$$

Integration von $t=0$ nach $t=\infty$:

$$\underbrace{V(x(\infty))}_{=0 \text{ wg. Stab.}} - \underbrace{V(x(0))}_{=0} + \int_0^\infty \begin{bmatrix} z^T & d^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma} I & 0 \\ 0 & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ d \end{bmatrix} dt < 0$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \left(\frac{1}{\gamma} z^T(t) z(t) - \gamma d^T(t) d(t) \right) dt < 0$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \|z(t)\|^2 dt < \gamma^2 \int_0^\infty \|d(t)\|^2 dt.$$

w.z.bw.

ist

Alternative Darstellung d. Bounded Real Lemma

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A & P B \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma} I & 0 \\ 0 & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\gamma I \end{bmatrix} + \frac{1}{\gamma} \begin{bmatrix} C^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}$$

$$\leadsto \underbrace{\begin{bmatrix} A^T P + P A & P B \\ B^T P & -\gamma I \end{bmatrix}}_{\text{"A"}} - \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma} C^T \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{"B"}} \cdot \underbrace{(-I)}_{\text{"C"}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma} C & 0 \end{bmatrix}}_{\text{"D"}} < 0$$

aus Schur Komplement Formel:

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A & P B & \frac{1}{\gamma} C^T \\ B^T P & -\gamma I & 0 \\ \frac{1}{\gamma} C & 0 & -I \end{bmatrix} < 0$$

ist

Bounded Real Lemma – Alternative Darstellung

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A & P B & \frac{1}{\gamma} C^T \\ B^T P & -\gamma I & 0 \\ \frac{1}{\gamma} C & 0 & -I \end{bmatrix} < 0$$

mit $T = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} I \end{bmatrix}$ folgt $T^T [Y.] T < 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} A^T P + P A & P B & C^T \\ B^T P & -\gamma I & 0 \\ C & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad \text{hat Lösung } P > 0$$

$$\Leftrightarrow \|u_g\|_{\infty} < \gamma \quad \& \quad u_g \text{ asy. stabil}$$

Standardform des
Bounded Real Lemmas

ist

Bounded Real Lemma

Satz: Folgende Aussagen sind äquivalent:

$$u_g: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bd \\ z = Cx \end{cases}$$

(i) u_g ist asy. stabil

$$\sum_{t=0}^{\infty} \|z(t)\|^2 dt < \gamma^2 \int_0^{\infty} \|d(t)\|^2 dt \quad \forall d \in L_2 \quad x(0) = 0$$

(ic) $A^T X + X A + C^T C + \frac{1}{\gamma^2} X B B^T X = 0$
hat eine eindeutige Lösung mit $X = X^T \geq 0$
 $(A + \frac{1}{\gamma^2} B B^T X)$ ist asy. stabil

(iic) Es existiert $P = P^T > 0$ so, dass

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A & P B \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma} I & 0 \\ 0 & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0$$

Bounded Real Lemma

ist

Bounded Real Lemma



=> 2 Ansätze:

- via algebraischen Riccati Gleichungen
- via Linear Matrix Inequalities (LMIs)